

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра вищої математики та інформатики

“ЗАТВЕРДЖУЮ”  
Декаан факультету математики і інформатики  
Григорій ЖОЛТКЕВИЧ  
“ 28 ” Серпня 2024 р.



РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ  
**КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ**

рівень вищої освіти бакалавр

галузь знань **01 Освіта/Педагогіка**

спеціальність **014.04 – Середня освіта. (Математика)**

освітня програма «**Математика та інформатика**»

вид дисципліни **обов'язкова**

факультет **математики і інформатики**

2024 / 2025 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

протокол № 8 від 27 серпня 2024 р.

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**КУЗНЄЦОВА Вікторія Олександрівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики та інформатики**

Програму схвалено на засіданні кафедри вищої математики та інформатики протокол № 1 від 27 серпня 2024 року.

Завідувач кафедри



Віктор ЛИСИЦЯ

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика та інформатика»

Гарант освітньої (професійної) програми



Ганна ЧЕРНОВА

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і інформатики. протокол протокол № 1 від 27 серпня 2024 р.

Голова науково-методичної комісії



Євген МЕНЯЙЛОВ

## ВСТУП

Програма навчальної дисципліни «КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ»  
складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки «бакалавр»  
спеціальності 014.04 – Середня освіта. (Математика)  
освітня програма «Математика та інформатика»

### 1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Мета викладання навчальної дисципліни полягає у наданні майбутнім спеціалістам знань у галузі сучасного комплексного аналізу.

1.2. Основними завданнями вивчення дисципліни є навчання студентів теоретичним основам і методам комплексного аналізу та застосуванню цих методів у інших математичних дисциплінах.

1.3. Кількість кредитів – 6

1.4. Загальна кількість годин – 180

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
<b>Нормативна / за вибором</b>	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
3-й	
Семестр	
6 - й	
Лекції	
64 год.	
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
84 год.	
у тому числі індивідуальні завдання розрахунково-графічна робота (1)	

1.6. Заплановані результати навчання:

#### **Знати:**

- означення експоненти, логарифму, тригонометричних функцій комплексної змінної;
- різні похідні для комплекснозначних функцій, їх геометричний сенс;
- означення голоморфних функцій;
- зв'язок між гармонічними та голоморфними функціями;

- означення інтегралу вздовж кривої;
- теорему Коші; інтегральну формулу Коші;
- розвинення основних голоморфних функцій у ряди Тейлора та Лорана;
- нерівність Коші, теорему Ліувіля;
- теореми єдності для голоморфних функцій;
- класифікацію ізольованих особливостей голоморфної функції;
- означення особливих точок; визначення характеру ізольованих особливих точок;
- означення лишків у скінченних та нескінченних ізольованих особливих точках;
- означення цілих та мероморфних функцій;
- означення конформного відображення;
- зв'язок між конформними та голоморфними відображеннями;
- основні конформні відображення та їх властивості: дробово-лінійне,  $zn$ ,  $n\sqrt[n]{z}$ ,  $e^z$ ,  $\ln z$ , функція Жуковського та обернена до неї.

**Уміти:**

- знаходити логарифм та комплексну ступінь комплексного числа;
- перевіряти виконання умов Коші-Рімана;
- відновлювати голоморфну функцію за заданою дійсною частиною;
- знаходити розвинення голоморфних функцій у ряди Тейлора та Лорана;
- проводити класифікацію ізольованих особливостей голоморфних функцій;
- обчислювати лишки та рахувати криволінійні інтеграли за допомогою лишків;
- обчислювати основні типи невластивих інтегралів за допомогою лишків;
- обчислювати деякі типи рядів за допомогою лишків;
- будувати конформні відображення однозв'язних областей за допомогою основних конформних відображень: дробово-лінійного  $zn$ ,  $n\sqrt[n]{z}$ ,  $e^z$ ,  $\ln z$ , функції Жуковського, користуватися принципом симетрії Рімана-Шварца для побудови конформних відображень деяких областей.

1.7 Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні мати наступні загальні компетентності :

- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу, володіння культурою мислення;
- здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями, використовувати знання про сучасну природничу картину світу в освітній та професійній діяльності, застосовувати знання у практичних ситуаціях;

- здатність використовувати основні методи, способи та засоби одержання, зберігання, переробки інформації;

- здатність працювати з комп'ютером як засобом управління інформацією.

1.8 Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні мати наступні фахові компетентності :

- володіння основними положеннями класичних розділів математики, її базовими ідеями та методами;

- здатність здійснювати логічний аналіз математичних об'єктів і процедур та конкретизацію абстрактних математичних знань у процесі вивчення математики;

- володіння культурами математичного мислення, логічною, алгоритмічною та евристичною; розуміння загальної структури математичного знання, взаємозв'язку між різними математичними дисциплінами; здатність користуватися мовою математики, коректно виражати та аргументовано обґрунтовувати наявні знання;

- здатність будувати математичні моделі для вирішення практичних проблем; розуміння критеріїв якості математичного моделювання;

- здатність застосовувати різні сценарії вивчення конкретного математичного матеріалу, накопичувати та систематизувати різні варіанти доказів теорем, розв'язків задач, банків ключових задач тощо;

- володіння основними положеннями історії розвитку математики, еволюції математичних ідей та основними концепціями сучасної математичної науки.

1.9 Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні мати наступні ПРН:

- знати базові поняття та теореми математичного, функціонального, комплексного аналізу, ряди, диференціювання та інтегрування функцій, інтегрування на поверхнях, термінологію теорії міри, інтегрування за Лебегом, нескінченновимірні метричні простори (банахові, гільбертові, тощо), функції комплексної змінної. Уміти досліджувати аналітичні об'єкти та використовувати їх у теоретичних та практичних задачах. Володіти методами математичного, функціонального аналізу, теорії функцій, методами математичних міркувань.

## **2. Тематичний план навчальної дисципліни**

### **Розділ1. Основні поняття комплексного аналізу.**

#### **Тема 1. Комплексна площина та функції комплексної змінної.**

1. Комплексні числа, дії з комплексними числами.

2. Означення функцій  $z^n$ ,  $\sqrt[n]{z}$ ,  $e^z$ ,  $\ln z$ , тригонометричних функцій комплексної змінної.

3. Топологія комплексної площини, розширена комплексна площина, стереографічна проекція.
4. Функції комплексної змінної, криві, області.

### **Тема 2. Диференційованість функцій, голоморфні та гармонічні функції.**

1. R- та C- диференційованість функцій комплексної змінної.
2. Умови Коші-Рімана.
3. Означення голоморфної функції.
4. Геометричний зміст модулю та аргументу голоморфної функції.
5. Гармонічні функції. Властивості гармонічних функцій.
6. Зв'язок гармонічних та голоморфних функцій. Відновлення голоморфної функції за заданою дійсною частиною.

### **Тема 3. Інтеграл від функції комплексної змінної та теорема Коші.**

1. Означення інтегралу вздовж кривої та його властивості.
2. Зв'язок з криволінійними інтегралами.
3. Формула Ньютона-Лейбниця. Первісна.
4. Теорема Коші для трикутника.
5. Теорема Коші для замкненої кривій в однозв'язній області.
6. Теорема Коші для функції, неперервної в замкненій області.

### **Тема 4. Інтегральна формула Коші та її застосування**

1. Інтегральна формула Коші.
2. Диференціювання інтегралу типа Коші.
3. Нескінченна диференційованість голоморфних функцій. Теорема Морери.
4. Теорема Вейерштрасса про рівномірно збіжну послідовність голоморфних функцій.
5. Степеневі ряди.
6. Розклад голоморфної функції в степеневий ряд.
7. Нерівність Коші для коефіцієнтів степеневого ряду.

8. Теорема Ліувілля.

## **Розділ 2. Нулі, ізольовані особливості, лишки.**

### **Тема 5. Нулі голоморфних функцій та безпосереднє аналітичне продовження.**

1. Нулі голоморфних функцій
2. Перша теорема єдності.
3. Теорема про те, що нулі не можуть згущатися.
4. Безпосереднє аналітичне продовження.
5. Особливості степеневого ряду на межі кола збіжності.

### **Тема 6. Ряд Лорана та ізольовані особливі точки.**

1. Ряд Лорана, розклад голоморфної функції в ряд Лорана.
2. Визначення характеру ізольованих особливих точок.
3. Теорема Сохоцького-Вейерштрасса.
4. Лишки. Обчислювання лишків.
5. Теореми Коші про лишки.

### **Тема 7. Застосування теореми Коші про лишки.**

1. Обчислення інтегралів по зімкненому контуру.
2. Лема Жордана
3. Обчислення інтегралів від тригонометричних функцій.
4. Обчислення невластивих інтегралів.
5. Підсумовування рядів.

## **Розділ 3. Конформні відображення та їх застосування.**

### **Тема 8. Елементарні конформні відображення.**

1. Означення конформного відображення.
2. Необхідні та достатні умови конформності.
3. Дробово-лінійні відображення та їх властивості.
4. Функції  $z^n, \sqrt[n]{z}$  та їх властивості.
5. Функції  $e^z, \ln z$  та їх властивості.
6. Властивості функції Жуковського та оберненої до неї.
7. Побудова конформних відображення однозв'язних областей за допомогою основних функцій: дробово-лінійної,  $z^n, \sqrt[n]{z}, e^z, \ln z$ , функції Жуковського та оберненої до неї.

### Тема 9. Основна теорема теорії конформних відображень.

1. Конформні автоморфізми та ізоморфізми.
2. Зв'язок між конформністю та голоморфністю для відображень.
3. Класи конформно-еквівалентних областей.
4. Теорема Пенлеве про зникнення особливостей.
5. Принцип симетрії Рімана-Шварца.

### 3. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
л		п	лаб.	інд.	с.р.	л		п	лаб.	інд.	с.р.	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
<b>Розділ 1. Основні поняття комплексного аналізу.</b>												
Тема 1. Комплексна площина та функції комплексної змінної.	18	8*	2*			8						
Тема 2. Диференційованість функцій, голоморфні та гармонічні функції	18	8*	2*			8						
Тема 3. Інтеграл від функції комплексної змінної та теорема Коші.	18	8*	2*			8						
Тема 4. Інтегральна формула Коші та її застосування	12	8*	2*			2						
<b>Розділ 2. Нулі, ізольовані особливості, лишки.</b>												
Тема 5. Нулі голо-	14	6*	4*			4						



морфних функцій та безпосереднє аналітичне продовження.												
Тема 6. Ряд Лорана та ізольовані особливі точки.	16	6*	4*			6						
Тема 7. Застосування теореми Коші про лишки.	36	6*	10*			20						
<b>Розділ 3. Конформні відображення та їх застосування.</b>												
Тема 8. Елементарні конформні відображення.	36	8*	4*			24						
Тема 9. Основна теорема теорії конформних відображень.	12	6*	2*			4						
<b>Усього годин</b>	<b>180</b>	<b>64</b>	<b>32</b>			<b>84</b>						

)\* Викладаються дистанційно, на платформі ZOOM

#### 4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1.	Комплексна площа та функції комплексної змінної.	2
2.	Диференційованість функцій, голоморфні та гармонічні функції.	2
3.	Інтеграл від функції комплексної змінної та теорема Коші	2
4.	Інтегральна формула Коші та її застосування	2
5.	Нулі голоморфних функцій та безпосереднє аналітичне продовження.	4
6.	Ряд Лорана та ізольовані особливі точки.	4
7.	Застосування теореми Коші про лишки (приклад)	10
8.	Елементарні конформні відображення..	4
9.	Основна теорема теорії конформних відображень.	2
	<b>Разом</b>	<b>32</b>

#### 5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
	Робота над розрахунково-графічними роботами та над домашніми завданнями протягом семестрів, що відповідають темам практичних занять:	
1.	Комплексна площа та функції комплексної змінної (Розрахунково-графічна робота).	8

2.	Диференційованість функцій, голоморфні та гармонічні функції.	8
3.	Інтеграл від функції комплексної змінної та теорема Коші	8
4.	Інтегральна формула Коші та її застосування	2
5.	Нулі голоморфних функцій та безпосереднє аналітичне продовження.	4
6.	Ряд Лорана та ізольовані особливі точки (Домашнє завдання).	6
7.	Застосування теореми Коші про лишки (приклад)	20
8.	Елементарні конформні відображення (Домашнє завдання).	24
9.	Основна теорема теорії конформних відображень.	4
	<b>Разом</b>	<b>84</b>

## 6. Індивідуальні завдання

розрахунково-графічні роботи (1).

## 7. Методи навчання

Лекційно-практичні, пояснювально-ілюстративні, репродуктивні, проблемного викладу, частково-пошукові. У разі оголошення карантину та в умовах воєнного стану, заняття проводяться дистанційно (за допомогою платформ ZOOM, GOOGLE CLASS), відповідно до наказу ректора Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна

## 8. Методи контролю

- облік відвідування аудиторних занять; перевірка домашніх завдань;
- перевірка виконання індивідуальних завдань (1) та контрольних робіт (1), колоквіум підсумковий контроль Екзамен).

## 9. Схема нарахування балів

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання							Колоквіум, передбачено навчальним планом	Екзамен	сума
Розділ 1	Розділ 2	Розділ 3	Розділ 4	Контрольна робота, передбачена навчальним планом	Розрахунково - графічна робота	Разом			
5	5	5	5	40	-	60	20	20	100

Для допуску до складання підсумкового контролю (заліку, або екзамену) здобувач вищої освіти повинен набрати **не менше 20 балів** з навчальної дисципліни під час поточного контролю, самостійної роботи, індивідуального завдання.

### Критерії оцінювання навчальних досягнень

Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою	
Оцінка	Пояснення	
90 – 100	Відмінно	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
70 – 89	Добре	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.
50 –69	Задовільно	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.
1–49	Незадовільно	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки.

### Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка за національною шкалою
	для чотирирівневої шкали оцінювання
90 – 100	відмінно
70-89	добре
50-69	задовільно
1-49	незадовільно

## 10. Рекомендована література

### Базова література

1. Єжов С.М., Разумова М.А. Теорія функцій комплексної змінної. навчальний посібник, К, ВПЦ «Київський університет», 2012
2. Комплексний аналіз. Приклади і задачі. (за редакцією В.Г.Самойленка). КНУ ім.Т.Шевченка., 2010.
3. А.В.Павленко, Л.П.Кагадій, В.Л. Копорулін, Теорія функцій комплексної змінної . навчальний посібник, Дніпропетровськ: НМетАУ, 2012
4. Т.А. Мельник, Комплексний аналіз . підручник, Київ: ВПЦ «Київський університет», 2015

### Допоміжна література

1. B.V. Shabat, Introduction to complex analysis. V.1, American Mathematical Society, 1992.
2. Edward C. Titchmarsh. The Theory of Functions. Oxford University Press; 2nd edition (May13, 1976)
3. M L.Alfors. Complex analysis. N.J.,”Kluver”, 1981.
4. M.A. Evgrafov. Analytic functions. Dover Publications; Translation edition (September 18, 2019)